Examen – Chaînes de Markov

21 octobre 2026

Durée : 3 heures. Les notes de cours (polycopiés ou notes manuscriptes) sont autorisées. Sont interdits : livres, calculatrices, téléphones, ordinateurs ou objets apparentés. Toutes les réponses doivent être justifiées ; la rédaction sera prise en compte. On pourra admettre un résultat d'une question précédente si nécessaire.

On note $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}$. On rappelle qu'une variable aléatoire V à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit :

- une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (notation : $V \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$) si
$$\mathbb{P}[V = k] = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!} \quad \text{pour tout } k \geq 0,$$
- une loi géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$ (notation : $V \sim \mathrm{Geom}(p)$) si
$$\mathbb{P}[V = k] = p\,(1-p)^k \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$

On cherche à modéliser et étudier l'expérience aléatoire suivante. Étant donnée une file d'attente qui commence avec $X_0 = 0$ personnes dedans, à chaque instant $n \geq 1$, un nombre $P_n \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ d'individus vient s'ajouter à la file d'attente. Chaque individu m reste dans la file d'attente un temps géométrique G_m, puis quitte la file (donc, si m rentre au temps n, il reste dans la file entre les temps n et $n + G_m$ inclus). On souhaite comprendre combien d'individus sont au temps $n \geq 1$ dans la file d'attente. La première partie du problème construit une chaîne de Markov $(M_n, k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui correspond à cette expérience. Les deux parties suivantes réduisent le problème en considérant deux autres chaînes de Markov $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont des images de $(M_n, k_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. La chaîne microscopique

Dans tout le problème, on fixe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires suivant une loi de Poisson $\mathrm{Poi}(\lambda)$, et une famille doublement infinie $(G_{n,m})_{n\geq 1, m\geq 1}$ de variables aléatoires suivant une loi géométrique $\mathrm{Geom}(p)$. Les paramètres λ et p sont fixés, et toutes ces variables sont supposées indépendantes. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des paires (M, k) avec M suite finie de paires d'entiers positifs, k entier positif, et les conditions suivantes :

$$\mathfrak{M} = \{(((m_1, t_1), ..., (m_r, t_r)), k) \,|\, r \geq 0,\ 1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_r \leq k, \text{ et les } t_i \geq 0\}.$$

Par exemple, $(((1, 3), (3, 0), (4, 2)), 4)$ est un élément de $\mathfrak{M}$.

(1) Vérifier que $\mathfrak{M}$ est bien un ensemble dénombrable. Ainsi, on pourra considérer des chaînes de Markov à valeurs dans $\mathfrak{M}$.

Pour décrire l'évolution de la file d'attente, on stocke à chaque temps n :

- l'ensemble M_n des paires (m_i, t_i) formées par les numéros m_i des individus dans la file, et les temps t_i qu'il leur reste à passer dans cette file.
- le numéro k_n du dernier individu rentré dans la file d'attente.

Au temps $n = 0$, il n'y a personne dans la file : $M_0 = \emptyset$ est la suite vide, et par convention $k_0 = 0$. Si (M_n, k_n) est connu, alors on construit (M_{n+1}, k_{n+1}) comme suit :

- Si $M_n = ((m_1, t_1), ..., (m_r, t_r))$, on retire de la file tous les individus m_i tels que $t_i = 0$, et on garde les autres individus m_j en diminuant d'une unité les temps t_j correspondant. Autrement dit, le début de la suite M_{n+1} est constitué de
$$M_n^* = ((m_{j_1}, t_{j_1} - 1), ..., (m_{j_q}, t_{j_q} - 1)), \text{ avec } j_1 < \cdots < j_q \text{ indices tels que } t_j \geq 1.$$

- De nouveaux individus $k_n+1, \dots, k_n+P_{n+1}$ viennent rejoindre la file d'attente. Chaque nouvel individu m se voit attribuer un temps de passage $G_{n+1,m}$. Ainsi,

$$M_{n+1} = M_n^* \cdot ((k_n+1, G_{n+1,k_n+1}), \dots, (k_n+P_{n+1}, G_{n+1,k_n+P_{n+1}})),$$

où $A \cdot B$ est la concaténation des vecteurs A et B.

(2) Quelle relation simple relie k_n, k_{n+1} et P_{n+1} ? On rappelle qu'une somme de deux variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ et μ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Pour tout entier $n \geq 1$, donner la loi du numéro k_n du dernier individu qui a rejoint la file (c'est-à-dire, donner une formule pour $\mathbb{P}[k_n = k]$).

(3) Construire une fonction $F : \mathfrak{M} \times (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{N} \to \mathfrak{M}$ telle que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$(M_{n+1}, k_{n+1}) = F((M_n, k_n), (G_{n+1,m})_{m\geq 1}, P_{n+1}).$$

Montrer que $(M_n, k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathfrak{M}$.

Si $M_n = ((m_1, t_1), \dots, (m_r, t_r))$, on note $T_n = (t_1, \dots, t_r)$ le vecteur formé seulement des temps restants, et $X_n = r$ le nombre d'éléments de M_n, c'est-à-dire le nombre d'individus dans la file d'attente au temps n.

2. La famille des temps restants

On note $\mathfrak{T} = \bigcup_{r\geq 0} \mathbb{N}^r$ l'ensemble des suites finies d'entiers positifs ; c'est un ensemble dénombrable, et pour tout $n \geq 0$, T_n prend ses valeurs dans $\mathfrak{T}$. Si $\tau = (t_1, \dots, t_r) \in \mathfrak{T}$, on note $|\tau| = r$ la longueur de ce vecteur, et $\phi(\tau) = \mathrm{card}(\{j \in [\![1, r]\!] \mid t_j \geq 1\})$.

(1) Écrire une formule reliant $|T_{n+1}|$, $\phi(T_n)$, et P_{n+1}.

(2) Si $T_n = \sigma$ et $T_{n+1} = \tau$, expliquer comment calculer les $\phi(\sigma)$ premières valeurs de τ à partir de σ. Dans ce qui suit, on note $\sigma \hookrightarrow \tau$ si les premières valeurs de τ peuvent être calculées de cette façon, et on dira alors que τ est compatible avec σ.

(3) On pose $\mathfrak{U} = \mathfrak{T} \times \mathbb{N}$. Construire une fonction $H : \mathfrak{U} \times (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{N} \to \mathfrak{U}$ telle que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$(T_{n+1}, k_{n+1}) = H((T_n, k_n), (G_{n+1,m})_{m\geq 1}, P_{n+1}).$$

Que peut-on en déduire concernant la suite $(T_n, k_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(4) On souhaite montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathfrak{T}$. Si $[\![a, a+b]\!]$ est un intervalle d'entiers, on note $G_{n,[\![a,a+b]\!]} = (G_{n,a}, G_{n,a+1}, \dots, G_{n,a+b})$ la partie de la suite $(G_{n,m})_{m\geq 1}$ correspondant à l'intervalle $[\![a, a+b]\!]$. Remarquons que la loi d'un vecteur $G_{n,[\![a+1,a+b]\!]}$ ne dépend pas de a. Introduisons les deux fonctions :

$$\rho : (\sigma, \tau) \in \mathfrak{T}^2 \mapsto |\tau| - |\phi(\sigma)| \in \mathbb{N}$$

et

$$\gamma : \bigsqcup_{r\geq 0} \mathbb{N}^r \times [\![0, r]\!] \to \mathfrak{T}$$
$$(t_1, \dots, t_r), s \mapsto (t_{r-s+1}, \dots, t_r).$$

Autrement dit, $\gamma(\tau, s)$ est constitué des s dernières valeurs du vecteur τ. Montrer qu'étant donnés $\tau_1, \dots, \tau_n$ dans $\mathfrak{T}$ avec $\tau_1 \hookrightarrow \tau_2, \dots, \tau_{n-1} \hookrightarrow \tau_n$, si

$$p_1 = \rho(\emptyset, \tau_1),\ p_2 = \rho(\tau_1, \tau_2), \dots, p_n = \rho(\tau_{n-1}, \tau_n)$$

et $k_i = p_1 + \cdots + p_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$, alors on a

$$\mathbb{P}[T_1 = \tau_1, \dots, T_n = \tau_n]$$
$$= \mathbb{P}[P_1 = p_1, \dots, P_n = p_n, G_{1,[\![1,k_1]\!]} = \gamma(\tau_1, p_1), \dots, G_{n,[\![k_{n-1}+1,k_n]\!]} = \gamma(\tau_n, p_n)].$$

(5) En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathfrak{T}$, de matrice de transition

$$Q(\sigma, \tau) = 1_{(\sigma \hookrightarrow \tau)}\, \mathbb{P}[P_1 = \rho(\sigma, \tau) \text{ et } G_{1,[\![1,P_1]\!]} = \gamma(\tau, \rho(\sigma, \tau))].$$

3. La chaîne de Markov des tailles de la file d'attente

Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un vecteur d'entiers positifs, on note

$$L(n, (x_1, \dots, x_n)) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

C'est donc la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{N}^n$. Si $\tau = (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{N}^r$ est un vecteur fixé, le début de cette section s'intéresse au calcul de :

$$q_n(x_1, \dots, x_{n-1}, r, \tau) = \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1},\, X_n = r,\, T_n = (t_1, \dots, t_r)],$$

(1) Si $n = 1$, relier T_1 à P_1 et à la suite $(G_{1,m})_{m\geq 1}$. En déduire la valeur de $L(1, (r))$, et montrer que :

$$q_1(r, \tau) = L(1, (r))\, p^r (1-p)^{t_1 + \cdots + t_r}.$$

(2) On suppose établie la formule

$$q_n(x_1, \dots, x_{n-1}, r, \tau) = L(n, (x_1, \dots, x_{n-1}, r))\, p^r (1-p)^{t_1 + \cdots + t_r}.$$

En décomposant la probabilité q_{n+1} selon les valeurs possibles σ de T_n, et en utilisant le fait que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, montrer que :

$$q_{n+1}(x_1, \dots, x_n, r, \tau)$$
$$= \left(\sum_{s=0}^{\min(x_n, r)} L(n, (x_1, \dots, x_n)) \binom{x_n}{s} p^{x_n - s} (1-p)^s \, \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^{r-s}}{(r-s)!} \right) p^r (1-p)^{t_1 + \cdots + t_r}.$$

Indication : l'incide s correspond au nombre de coordonnées de σ plus grandes que 1.

(3) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout vecteur $(x_1, \dots, x_{n-1}, r) \in \mathbb{N}^n$, on a :

$$\sum_{(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{N}^r} q_n(x_1, \dots, x_{n-1}, r, (t_1, \dots, t_r)) = L(n, (x_1, \dots, x_n)).$$

Déduire ensuite de la question précédente :

- une formule exprimant $L(n+1, (x_1, \dots, x_n, r))$ en fonction de $L(n, (x_1, \dots, x_n))$.
- le fait que $q_{n+1}(x_1, \dots, x_n, r, \tau) = L(n+1, (x_1, \dots, x_n, r))\, p^r (1-p)^{t_1 + \cdots + t_r}$.

(4) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition

$$P(q, r) = \sum_{s=0}^{\min(q,r)} \binom{q}{s} p^{q-s} (1-p)^s \, \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^{r-s}}{(r-s)!}.$$

Vérifier qu'on a bien $\sum_{r=0}^{\infty} P(q, r) = 1$ pour tout entier $q \in \mathbb{N}$.

(5) Montrer que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible sur $\mathbb{N}$.

(6) Trouver l'unique paramètre ν tel que la loi de Poisson $\pi = \mathrm{Poi}(\nu)$ soit une mesure invariante pour la matrice de transition P, c'est-à-dire telle que $\pi P = \pi$.

I.1 Pour tout entier $r \geq 0$, $\mathbb{N}^r$ est un ensemble dénombrable, et pour tout entier $k \geq 1$, l'ensemble $\mathfrak{P}_r(\llbracket 1, k \rrbracket)$ des parties $\{m_1 < m_2 < \cdots < m_r\}$ de taille r de $\llbracket 1, k \rrbracket$ est fini, donc dénombrable. On a par définition une bijection entre $\mathfrak{M}$ et l'union disjointe $\bigsqcup_{k\geq 1,\, r\geq 0} \mathfrak{P}_r(\llbracket 1, k \rrbracket) \times \mathbb{N}^r$, donc $\mathfrak{M}$ est une union disjointe de produits d'ensembles dénombrables, donc est dénombrable.

I.2 On a $k_{n+1} = k_n + P_{n+1}$. Par conséquent, $k_n = P_1 + \cdots + P_n$ est la somme de n variables de Poisson indépendantes de paramètre λ, donc $k_n \sim \mathrm{Poi}(n\lambda)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}[k_n = k] = \mathrm{e}^{-n\lambda}\, \frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

pour tout $k \geq 0$.

I.3 Par construction, si

$$F : \mathfrak{M} \times (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{N} \to \mathfrak{M}$$
$$(M, k), (g_m)_{m\geq 1}, p \mapsto (M^* \cdot ((k+1, g_{k+1}), \dots, (k+p, g_{k+p})), k+p),$$

alors $(M_{n+1}, k_{n+1}) = F((M_n, k_n), (G_{n+1,m})_{m\geq 1}, P_{n+1})$.

Ainsi, si $\xi_n = ((G_{n,m})_{m\geq 1}, P_n) \in \mathfrak{E} = (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{N}$, alors

$$(M_{n+1}, k_{n+1}) = F((M_n, k_n), \xi_{n+1})$$

avec $F : \mathfrak{M} \times \mathfrak{E} \to \mathfrak{M}$, et les variables ξ_n indépendantes et de même loi. Comme $(M_0, k_0) = (\emptyset, 0)$ est une constante, (M_0, k_0) est indépendant des variables de la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$. Les hypothèses du théorème de représentation sont donc réunies, et $(M_n, k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathfrak{M}$.

II.1 Le vecteur T_{n+1} est constitué des $\phi(T_n)$ coordonnées de T_n plus grandes que 1 (toutes diminuées d'une unité), suivies de P_{n+1} nouvelles coordonnées suivant des lois géométriques. On a donc :

$$|T_{n+1}| = \phi(T_n) + P_{n+1}.$$

II.2 Les $\phi(\sigma)$ premières coordonnées de τ sont les coordonnées de σ plus grandes que 1, toutes diminuées d'une unité. Autrement dit, avec des notations similaires à celles de la première section, $\tau = \sigma^* \cdot (\text{nouvelles coordonnées})$.

II.3 Si

$$H : \mathfrak{U} \times (\mathbb{N})^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{N} \to \mathfrak{U}$$
$$(\sigma, k), (g_m)_{m\geq 1}, p \mapsto (\sigma^* \cdot (g_{k+1}, \dots, g_{k+p}), k+p)$$

alors $(T_{n+1}, k_{n+1}) = H((T_n, k_n), (G_{n+1,m})_{m\geq 1}, P_{n+1})$. Comme dans la question I.3, ceci implique que $(T_n, k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathfrak{U}$.

II.4 À chaque étape i, si $T_{i-1} = \tau_{i-1}$ et $T_i = \tau_i$, alors

$(\tau_i, k_i) = H((\tau_{i-1}, k_{i-1}), (G_{i,m})_{m\geq 1}, P_i) = (\tau_{i-1}^* \cdot G_{i,\llbracket k_{i-1}+1, k_{i-1}+P_i \rrbracket}, k_{i-1} + P_i)$.

Par hypothèse, $\tau_{i-1} \hookrightarrow \tau_i$, donc la condition sur le vecteur τ_i se réécrit :

$$\gamma(\tau_i, P_i) = G_{i,\llbracket k_{i-1}+1, k_{i-1}+P_i \rrbracket}.$$

Par ailleurs, il faut que P_i soit le nombre de nouvelles coordonnées dans T_i, donc que $P_i = |T_i| - \phi(T_{i-1}) = \rho(\tau_{i-1}, \tau_i)$ par la question II.1. Ainsi, $T_1 = \tau_1, \dots, T_n = \tau_n$ si et seulement si

$$P_i = p_i,\ \gamma(\tau_i, p_i) = G_{i,\llbracket k_{i-1}+1, k_{i-1}+p_i \rrbracket}$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

II.5 Comme P_n et $(G_{n,m})_{m\geq 1}$ sont indépendants des valeurs précédentes $P_1, \dots, P_{n-1}$ et $(G_{1,m})_{m\geq 1}, \dots, (G_{n-1,m})_{m\geq 1}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[T_1 = \tau_1, \dots, T_n = \tau_n] \\
&= \mathbb{P}[T_1 = \tau_1, \dots, T_{n-1} = \tau_{n-1}]\, \mathbb{P}[P_n = p_n \text{ et } G_{n,[\![k_{n-1}+1, k_{n-1}+p_n]\!]} = \gamma(\tau_n, p_n)] \\
&= \mathbb{P}[T_1 = \tau_1, \dots, T_{n-1} = \tau_{n-1}]\, \mathbb{P}[P_n = p_n \text{ et } G_{n,[\![1,p_n]\!]} = \gamma(\tau_n, p_n)],
\end{aligned}$$

en utilisant à la seconde ligne l'invariance de la loi du vecteur $G_{n,[\![a+1,a+p_n]\!]}$ par translation par a. Cette relation est vraie si τ_{n-1} est compatible avec τ_n, et sinon, la probabilité vaut 0. Par récurrence, on obtient donc :

$$\mathbb{P}[T_1 = \tau_1, \dots, T_n = \tau_n] = Q(\emptyset, \tau_1) \cdots Q(\tau_{n-1}, \tau_n)$$

avec

$$Q(\sigma, \tau) = \mathbb{P}[P_1 = \rho(\sigma, \tau) \text{ et } G_{1,[\![1,\rho(\sigma,\tau)]\!]} = \gamma(\tau, \rho(\sigma, \tau))]$$

si $\sigma \hookrightarrow \tau$, et 0 sinon. C'est la formule pour la loi d'une chaîne de Markov de matrice Q sur $\mathfrak{T}$.

III.1 On a $T_1 = G_{1,[\![1,P_1]\!]}$: T_1 est constitué d'un nombre aléatoire de coordonnées indépendantes suivant des lois géométriques, ce nombre suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Ainsi,

$$L(1, (r)) = \mathbb{P}[P_1 = r] = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^r}{r!},$$

et

$$\begin{aligned}
q_1(r, \tau) = Q(\emptyset, \tau) &= \mathbb{P}[P_1 = r \text{ et } G_{1,[\![1,r]\!]} = \tau] \\
&= L(1, (r)) \prod_{j=1}^{r} \mathbb{P}[G_{1,j} = t_j] = L(1, (r))\, p^r (1-p)^{t_1 + \cdots + t_r}.
\end{aligned}$$

III.2 Si $\tau = (t_1, \dots, t_r) = T_{n+1}$, alors il existe un indice $s \in [\![0, r]\!]$ tel que $T_n^* = (t_1, \dots, t_s)$. Ceci veut dire que le vecteur $T_n = \sigma$ est constitué des coordonnées $(t_1 + 1, \dots, t_s + 1)$, plus $x_n - s$ coordonnées 0 intercalées parmi ces valeurs. Si s est fixé, alors il y a $\binom{x_n}{s}$ possibilités pour σ, et par l'hypothèse de récurrence, si σ est fixé, alors

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, T_n = \sigma] = L(n, (x_1, \dots, x_n))\, p^{x_n} (1-p)^{t_1 + \cdots + t_s + s}.$$

Notons que l'événement $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, T_n = \sigma\}$ ne dépend que de $T_1, \dots, T_n$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, T_n = \sigma, T_{n+1} = \tau] \\
&= \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, T_n = \sigma]\, Q(\sigma, \tau) \\
&= \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, T_n = \sigma]\, \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^{r-s}}{(r-s)!}\, p^{r-s}\, (1-p)^{t_{s+1} + \cdots + t_r}.
\end{aligned}$$

En sommant sur s et sur les possibilités pour σ, on conclut que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = r, T_{n+1} = \tau] \\
&= \sum_{s=0}^{\min(x_n, r)} \binom{x_n}{s} L(n, (x_1, \dots, x_n))\, \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\, \lambda^{r-s}}{(r-s)!}\, p^{r-s+x_n}\, (1-p)^{t_1 + \cdots + t_r + s}.
\end{aligned}$$

C'est la formule recherchée à factorisation par $p^r (1-p)^{t_1 + \cdots + t_r}$ près.

III.3 On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{(t_1,\dots,t_r)\in\mathbb{N}^r} q_n(x_1,\dots,x_{n-1},r,(t_1,\dots,t_r))\\
&= \sum_{(t_1,\dots,t_r)\in\mathbb{N}^r} \mathbb{P}[X_1=x_1,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},\, X_n=r,\, T_n=(t_1,\dots,t_r)]\\
&= \mathbb{P}[X_1=x_1,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},\, X_n=r] = L(n,(x_1,\dots,x_{n-1},r)).
\end{aligned}$$

En effet, faire la somme sur les vecteurs $(t_1,\dots,t_r)$ revient à faire faire la somme sur les toutes les possibilités pour T_n, $X_n = r$ étant fixé. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&L(n+1,(x_1,\dots,x_{n-1},x_n,r))\\
&= \sum_{\tau\in\mathbb{N}^r} q_{n+1}(x_1,\dots,x_n,r,\tau)\\
&= \left(\sum_{s=0}^{\min(x_n,r)} \binom{x_n}{s} L(n,(x_1,\dots,x_n))\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{r-s}}{(r-s)!}\,p^{x_n-s}\,(1-p)^s\right)\left(\sum_{\tau\in\mathbb{N}^r} p^r(1-p)^{t_1+\cdots+t_r}\right)\\
&= \sum_{s=0}^{\min(x_n,r)} \binom{x_n}{s} L(n,(x_1,\dots,x_n))\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{r-s}}{(r-s)!}\,p^{x_n-s}\,(1-p)^s.
\end{aligned}$$

Cette formule étant établie, on reconnaît alors que :

$$q_{n+1}(x_1,\dots,x_n,r,\tau) = L(n+1,(x_1,\dots,x_n,r))\,p^r(1-p)^{t_1+\cdots+t_r}.$$

Par induction sur n, $q_n(x_1,\dots,x_{n-1},r,\tau) = L(n,(x_1,\dots,x_{n-1},r))\,p^r(1-p)^{t_1+\cdots+t_r}$: conditionnellement à la valeur de $(X_1,\dots,X_n)$, les coordonnées de T_n suivent X_n lois géométriques indépendantes de paramètre p.

III.4 D'après la question précédente,

$$L(n+1,(x_1,\dots,x_{n-1},q,r)) = L(n,(x_1,\dots,x_{n-1},q))\,P(q,r).$$

Notons que $P(0,r) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^r}{r!} = L(1,(r))$. Par induction sur n, on a donc :

$$\mathbb{P}[X_1=x_1,\dots,X_n=x_n] = P(0,x_1)\,P(x_1,x_2)\cdots P(x_{n-1},x_n).$$

Ceci prouve que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'état initial 0 et de matrice P. Cette matrice est bien stochastique :

$$\begin{aligned}
\sum_{r\in\mathbb{N}} P(q,r) &= \sum_{s=0}^{q}\sum_{r\geq s}\binom{q}{s}\,p^{q-s}\,(1-p)^s\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^{r-s}}{(r-s)!}\\
&= \sum_{s=0}^{q}\binom{q}{s}\,p^{q-s}\,(1-p)^s = 1
\end{aligned}$$

en utilisant d'abord une loi de Poisson pour réduire la somme sur r, puis une loi binomiale pour réduire la somme sur s.

III.5 Remarquons que $P(q,r) > 0$ pour tout q,r entier, car la somme définissant $P(q,r)$ est plus grande que son terme $s=0$, qui est

$$\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^r}{r!}\,p^q > 0.$$

Ceci implique immédiatement que la chaîne est irréductible, et apériodique car $P(q,q) > 0$ pour tout $q\in\mathbb{N}$.

III.6 Si $\pi = \mathrm{Poi}(\nu)$, alors

$$\begin{aligned}(\pi P)(r) &= \mathrm{e}^{-\nu} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\nu^q}{q!}\, P(q,r) \\ &= \mathrm{e}^{-\nu-\lambda} \sum_{s=0}^{r} \sum_{q=s}^{\infty} \frac{p^{q-s}(1-p)^s\, \lambda^{r-s}\, \nu^q}{s!(q-s)!(r-s)!} \\ &= \mathrm{e}^{-\nu(1-p)-\lambda} \sum_{s=0}^{r} \frac{((1-p)\nu)^s\, \lambda^{r-s}}{s!(r-s)!} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\nu(1-p)-\lambda}\, ((1-p)\nu+\lambda)^r}{r!}.\end{aligned}$$

Ceci vaut $\pi(r)$ si et seulement si $\nu = (1-p)\nu + \lambda$, c'est-à-dire si et seulement si $\nu = \frac{\lambda}{p}$.